Geometrische Darstellung der Theorie der Polargruppen.

Von Emil **Waelsch**,

ord. Hörer an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1883.)

1. Definition der Polargruppen. Es gibt immer eine Curve n-ter Ordnung $\mathfrak{C}_n$, welche n durch einen Punkt s gehende Strahlen in ihren Schnittpunkten (a) mit einer Geraden T berührt und in einem Punkte v des Strahles, der von s nach einem Punkte o von T geht, einen $(n-1)$-fachen Punkt hat. Die Tangenten (t) dieses Punktes schneiden T in $(n-1)$ Punkten (m), welche, wie leicht gezeigt werden kann, nur von dem Punktsystem (a) und der Lage von o abhängen; sie werden erste Polargruppe des Poles o in Bezug auf (a) genannt und sollen mit $(a)_1^0$ bezeichnet werden.[1] (Die durch diese Construction entstehende Figur wird im Folgenden „Grundfigur" genannt.)

Die Punkte $(m)_1^0$ sind die zweite Polargruppe, $(a)_2^0$, und man gelangt, dies fortgesetzt, zur Definition der r-ten Polargruppe, $(a)_r^0$, eines Poles o, bezüglich des Punktsystems (a). Zugleich ergiebt sich:

Satz 1. $((a)_r^0)_s^0 \equiv (a)_{r+s}^0$.

Für ein zweipunktiges System (a) kann leicht gezeigt werden, dass die Punkte o, (a), $(a)_1^0$ vier harmonische sind.

2. Unveränderlichkeit der polaren Beziehung durch Centralprojection. Ändert sich in der Grundfigur die Gerade T in eine beliebige T' und gleichzeitig der Punkt v in einen Punkt v' auf sv, so übergeht $\mathfrak{C}_n$ in eine $\mathfrak{C}'_n$, welche ihr in einer Perspectivität entspricht, die s zum Centrum v, v'; T, T' zu

[1] Die Identität derselben mit der bekannten Polargruppe wird in 7. bewiesen werden.

entsprechenden Gebilden hat. Die entsprechenden Punktgruppen $(t)T$; $(t')T'$ liegen auf Strahlen durch s, und man hat daher mit Hilfe von Satz 1.

Satz 2. Die polare Beziehung ändert sich durch Centralprojection nicht.

Mit Hilfe des vollständigen Vierseits kann nun, was später nützlich sein wird, bewiesen werden, dass für ein zweipunktiges System (a) gilt: Ist $m \equiv (a)_1^0$, so ist auch $o \equiv (a)_1^m$.

3. Zusammenfallen der Fundamentalpunkte.

a) Fallen σ der Punkte (a) in einen α aber nicht mit dem Pole o zusammen, so hat die $\mathfrak{C}_n$ in α einen σ-fachen Selbstberührungspunkt mit der Tangente $s\alpha$ und enthält also, da sie in v einen $(n-1)$-fachen Punkt hat, die $(\sigma-1)$-mal gezählte Gerade als Theil. Man hat daher für die gemachten Voraussetzungen einen Satz für die erste Polargruppe, welcher sich durch Satz 1. verallgemeinert in:

Satz 3. Fallen σ der Punkte (a) in einen α zusammen, so fallen in α auch $(\sigma-i)$ Punkte der i-ten Polargruppe für jeden beliebigen Pol.

b) Fallen σ der Punkte (a) mit dem Pole o zusammen, so zerfällt die $\mathfrak{C}_n$ in die σ-mal gezählte Gerade vs und eine $\mathfrak{C}_{n-\sigma}$, welche für die übrigen einfachen Punkte von (a) die erste Polargruppe von o liefert. Dies giebt mit Hilfe von Satz 1.:

Satz 4. Fallen σ der Punkte (a) mit dem Pole o zusammen, so fallen in o σ Punkte einer beliebigen, der $(n-i)$-ten, seiner Polargruppen (mit der Einschränkung $i \gtreqless \sigma$). Die übrigen Punkte dieser Gruppe sind die $(n-i)$-te Polargruppe für denselben Pol bezüglich der $n-\sigma$ nicht mit o zusammenfallenden Punkten von (a).

Ist $\sigma = i$, so hat die $\mathfrak{C}_{i+1}$, welche schliesslich zur Construction der $(n-i)$-ten Polargruppe verwendet wurde, die $\sigma = i$-mal gezählte Gerade ov als Tangentencomplex ihres i-fachen Punktes v.

Ist $\sigma = i+1$, so hat diese $\mathfrak{C}_{i+1}$ in v einen $(i+1)$-fachen Punkt, und es kann daher jede durch diesen Punkt gehende Gerade als Tangente des obigen i-fachen Punktes angesehen werden. Es ist also in dem letzten Falle die $(n-i)$-te und also jede höhere Polare unbestimmt.

c) Bewegt sich in der Grundfigur s auf einer Geraden, so bilden die entstehenden $\mathfrak{C}_n$ ein Büschel, welches durch die Tangenten (t) seiner Curven alle ersten Polargruppen auf T liefert. Eine Gerade durch v kann nun, des Curvenbüschels wegen, nur einmal als eine Gruppe (t) bildend, also jeder Punkt von T nur einmal als einer ersten Polargruppe angehörend, auftreten. Da aber ein Punkt von (a) nach *b)* seiner ersten Polargruppe angehört, so kann er nicht mehr Theil einer anderen ersten Polargruppe sein und es folgt:

Satz 5. Soll ein Pol mit einem Punkte einer seiner Polargruppen zusammenfallen, so muss er zu (a) gehören.

4. Polargruppen für verschiedene Pole. Es sei die Definition der ersten Polaren eines Punktes o in Bezug auf eine Curve n-ter Ordnung C_n mit Hilfe der definirten Polargruppen gegeben worden, und man bezeichne sie durch $(C_n)_1^0$.

Hilfssatz 1. Berühren sich zwei Curven C_n und C'_n in n Punkten (a) einer Geraden, die durch o geht, so berühren sich die Curven $(C_n)_1^0$ und $(C'_n)_1^0$ in den Punkten $(a)_1^0$.

Hilfssatz 2. Hat eine C_n einen $(n-1)$-fachen Punkt v mit den Tangenten (t), so hat für einen beliebigen Pol o die Curve $(C_n)_1^0$ in v einen $(n-2)$-fachen Punkt, dessen Tangenten die Geraden $(t)_1^0$ sind.

Diese Sätze lassen sich mit dem Bisherigen leicht beweisen.

Satz 6. $(a)_1^0{}_1^{0'} \equiv (a)_1^{0'}{}_1^0$.

Beweis. In der Grundfigur bestimme man für einen Punkt o' der Geraden T die Curve $(\mathfrak{C}_n)_1^{0'}$; nach Hilfssatz 1. berührt sie die Geraden $s; (a)_1^{0'}$, in den Punkten $(a)_1^{0'}$ und nach Hilfssatz 2. hat sie in ihrem $(n-2)$-fachen Punkte v die Geraden $v; (a)_1^0{}_1^{0'}$ zu Tangenten.

Zur Construction der Punkte $(a)_1^{0'}{}_1^0$ wird eine $\mathfrak{C}_{n-1}$ verwendet, welche die Geraden $s; (a)_1^{0'}$ in den Punkten $(a)_1^{0'}$ berührt und in v einen $(n-2)$-fachen Punkt hat, dessen Tangenten die Geraden $v; (a)_1^{0'}{}_1^0$ sind.

$(\mathfrak{C}_n)_1^{0'}$ und $\mathfrak{C}_{n-1}$ haben $(n-2)^2 + 2(n-1) = (n-1)^2 + 1$ Punkte gemein, sind daher identisch und die Tangenten ihrer $(n-2)$-fachen Punkte dieselben, womit Satz 6. bewiesen.

Nach diesem Satze ist $(a)^{0\,0\,\cdots\,0\,0'\,0'\cdots\,0'}_{1\,1\,\cdots\,1\,1\,\cdots\,1} \equiv (a)^{0'\,0'\cdots\,0'\,0\,0\cdots\,0}_{1\,1\,\cdots\,1\,1\,1\cdots\,1}$, (wo r-mal o und r'-mal o' nebeneinander steht), und man hat daher:

Satz 7. $(a)^{0\,0'}_{r\,r'} \equiv (a)^{0'\,0}_{r'\,r}$.

5. Reciprocität der Polargruppen. Man bestimme die zwei Punkte $(\alpha) \equiv (a)^0_{n-2}$, den Punkt $m \equiv (a)^0_{n-1} \equiv (\alpha)^0_1$, und dann die Punkte $(\beta) \equiv (a)^m_1$; dann ist nach dem letzten Satze $(\alpha)^m_1 \equiv (\beta)^0_{n-2}$ und dies $\equiv o$, weil nach 2., wenn $m \equiv (\alpha)^0_1$, auch $o \equiv (\alpha)^m_1$. Da also $(\beta)^0_{n-2} \equiv o$ ist, so muss nach Satz 5. o einer der Punkte (β) sein, und man hat:

Satz 8. Ist $m \equiv (a)^0_{n-1}$, so ist o einer der Punkte $(a)^m_1$.

Bestimmt man die Gruppe $(m) \equiv (a)^0_r$ und für einen Punkt m derselben die Gruppe $(p) \equiv (a)^m_{n-r-1}$, so ist nach Satz 7. der Punkt $(p)^0_r \equiv (m)^m_{n-r-1}$, nach Satz 4., $\equiv m$. Nach Satz 8. ist jetzt o einer der Punkte $(p)^m_1$ und folglich nach Satz 1. o einer der Punkte $(a)^m_{n-r}$, also hat man:

Satz 9. Ist m ein Punkt der Gruppe $(a)^0_r$, so ist o ein Punkt der Gruppe $(a)^m_{n-r}$.

6. Fundamentalpunkte in Polargruppen. Die letzten $(n-1)$ Punkte von $(a) \equiv a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ sollen mit (a') bezeichnet werden. Ist $a_1 \equiv (a')^o_{v-1}$, so ist nach Satz 8. o einer der Punkte $(a')^{a_1}_{n-r}$ und nach Satz 4. einer der Punkte $(a)^{a_1}_{n-r}$; also folgt nach Satz 9.:

Satz 10. Ist a_1 ein Punkt der $(r-1)$-ten Polargruppe bezüglich des Punktsystems $a_2 a_3 \ldots a_n$ für den Pol o, so ist a_1 auch ein Punkt der r-ten Polargruppe für das Punktsystem $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ und denselben Pol.

7.[1] Über die erste Polare und Polargruppe. Construirt man eine Curve $\mathfrak{C}_n$, welche in einem Punkte v der Ebene einen $(n-1)$-fachen Punkt hat und eine C_n in n Punkten, die auf einer Geraden T liegen, berührt, so schneiden die Tangenten (t) des Punktes v die T in $(n-1)$ Punkten (p), die der ersten Polaren $(C_n)^0_1$ angehören. Denn nach dem Satze von Mac-Laurin (Cremona, ebene Curven, S. 108) fällt die gerade Polare eines Punktes von (p) bezüglich $\mathfrak{C}_n$ mit der geraden Polare dieses Punktes bezüglich $\mathfrak{C}_n$ zusammen. Letztere geht durch v, also ist die Behauptung erwiesen.

[1] Als Anhang.

Besteht C_n aus n durch einen Punkt s gehenden Geraden so erhält man die Grundfigur in 1. und erkennt in den dort bestimmten Punkten (m) die bekannte erste Polargruppe.

Ferner folgt: Die ersten Polaren eines Punktes v in Bezug auf alle Curven, welche in n Punkten (a) einer Geraden T die nämlichen Tangenten (A) haben, gehen durch dieselben $(n-1)$ festen Punkte von T.

Wird eine der Tangenten (A) z. B. A um ihren Punkt a gedreht, so bilden für ein festgehaltenes v die Punkte (p) eine Involution I_{n-1}, weil es ja immer ein Curvenbüschel unter den möglichen C_n geben muss. Schneiden sich die festen Geraden (A) in einem Punkte s, so tritt entsprechend der durch s gehenden Lage von A in der Involution I_{n-1}, wenn vs; $T \equiv o$ ist, die Gruppe $(a)_1^0$ auf.

Geht A durch v, so besteht die entsprechende $\mathfrak{C}_n$, da auf va $(n+1)$ ihrer Punkte liegen, aus va und einer $\mathfrak{C}_{n-1}$, welche wenn man die um a verminderte Gruppe (a) mit (a') bezeichnet, die Punkte $(a')_1^0$ liefert. a und $(a')_1^0$ bilden also eine zweite Gruppe der I_{n-1}.

Fällt A mit T zusammen, so besteht die entsprechende $\mathfrak{C}_n$ aus T, da sie $(n+1)$ Punkte dieser Geraden enthält und aus $(n-1)$ Geraden die durch v gehen; diese müssen, da $\mathfrak{C}_n$ die Geraden (A) in den Punkten (a) berühren muss, durch die Punkte (a') gehen. (a') ist daher eine dritte Gruppe der I_{n-1}. Hieraus folgt:

Theilt man die n-punktige Gruppe (a) in einen Punkt a und eine $(n-1)$-punktige Gruppe (a'), so sind die Gruppen 1. $(a)_1^0$, 2. (a'), 3. $(a')_1^0$ und a Gruppen einer Involution.

Dieser Satz beweist wieder die Sätze 3. und 4. und giebt auch die Lage der nicht mit den (a) zusammenfallenden Punkte der Polargruppen an.

Der letzte Satz soll angewendet werden zur Lösung der Aufgabe: In Bezug auf drei auf einem Kegelschnitte gelegene Punkte $a_1 a_2 a_3$ für einen Punkt o desselben, die erste Polargruppe bestehend aus den Punkten $m_1 m_2$ zu bestimmen.

Die Ecken des durch die Tangenten $A_1 A_2 A_3$ des Kegelschnitts in den Punkten $a_1 a_2 a_3$ gebildeten Dreiecks, die diesen Punkten gegenüberliegen, seien respective $b_1 b_2 b_3$. Nach dem letzten

Satze ist das zu suchende Paar $m_1 m_2$ ein Paar der drei quadratischen Involutionen, welche bestimmt sind durch die Paare 1. $a_2 a_3$ und $a_1 d_1$, 2. $a_3 a_1$ und $a_2 d_2$, 3. $a_1 a_2$ und $a_3 d_3$, wo $d_1 d_2 d_3$ von o harmonisch getrennt sind bezüglich durch die Paare $a_2 a_3$, $a_3 a_1$, $a_1 a_2$, also ein Dreieck bilden, das zu $b_1 b_2 b_3$ für das Centrum o perspectivisch liegt.

Die Pole $\alpha \beta \gamma$ dieser drei Involutionen liegen auf der Geraden $m_1 m_2$. $\alpha \beta$ schneidet A_3 in einem Punkte, der nach dem Satze von Pascal für das Fünfeck $d_1 a_1 a_3 a_2 d_2$ auch auf der Geraden $d_1 d_2$ liegt; man hat daher:

Die Verbindungslinie der Punkte $m_1 m_2$ ist die Perspectivitätsaxe der Dreiecke $b_1 b_2 b_3$ und $d_1 d_2 d_3$.
